К ВОПРОСУ О ВЕРОЯТНОСТНОМ ХАРАКТЕРЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Макеенко Г.И., Цурганов А.Г.
УО «Витебский государственный ордена Дружбы народов медицинский университет»

Еще сравнительно недавно применение математики в большинстве естественных и технических наук ограничивалось классическими разделами математики, такими, как дифференциальное исчисление, интегральное исчисление. Вероятностные идеи и методы находили применение только в новых областях физики. Последние десятилетия существенно изменили положение дела. Вероятностные и статистические методы широко проникли в технические, технологические , биологические науки, главным образом, в связи с развитием экспериментальной техники и необходимостью более тонкого анализа результатов эксперимента.

При изучении явлений производят наблюдения или опыты, которые на языке математической статистики можно назвать одним словом - испытания. Их результаты обычно регистрируют в виде значений некоторых наблюдаемых величин. Чем большее число знаков нам удается снять с показаний приборов, тем нагляднее выступают различия между результатами измерений.

Независимо от применяемого способа всякое измерение любой физической величины сводится к экспериментальному определению отношения данной величины к другой подобной, принятой за единицу. В большинстве случаев при прямых измерениях в скрытом виде имеет место не прямое измерение, а косвенное.

Действительно, различные измерительные приборы (вольтметры, амперметры, термометры, манометры и т.д.) дают показания в делениях шкалы, так что мы непосредственно измеряем лишь линейные или угловые отклонения стрелки, указывающие нам значение измеряемой величины через ряд промежуточных соотношений, связывающих отклонение стрелки с измеряемой величиной. Характерно при этом, что сведение измерения разнообразных величин к линейным и угловым измерениям имеет место в подавляющем большинстве измерительных приборов.

Это не случайно, поскольку наиболее развитым из наших чувств является зрение, а следовательно, нам очень удобно и наглядно сравнивать величины, непосредственно воспринимаемые глазами. Такими, естественно, являются пространственные величины, в первую очередь, длины и углы.

При повторении опытов мы обнаруживаем разброс их результатов. Например, повторяя измерения одной и той же величины одним и тем же прибором при сохранении определенных условий (температура, влажность и т.п.), мы получаем результаты, которые хоть немного, но все же отличаются друг от друга. Даже многократные измерения не дают возможности точно предсказать результат следующего измерения. В этом смысле говорят, что результат измерения есть величина случайная, появляющаяся в результате случайного события.

Случайный характер измерения величины проявляется в том, что нельзя предвидеть, какое именно из своих значений она примет в итоге испытания. Но совокупное действие многих случайных причин может приводить к результату, почти не зависящему от случая.

Так, при рассмотрении суммы большого числа случайных величин и их средних арифметических мы обнаруживаем, что частичное погашение отклонений при сложении вызывает уменьшение рассеяния средней арифметической и дает возможность предсказать ее поведение при неограниченном увеличении числа слагаемых. Закономерности такого рода и условия их возникновения составляют содержание ряда важных теорем, получивших общее название закона больших чисел

В частности, теорема Чебышева позволяет сделать утверждение , что для последовательности попарно независимых случайных величин $\{X_n\}$ с равномерно ограниченными дисперсиями и равными математическими ожиданиями, последовательность средних арифметических сходится по вероятности к общему центру распределения всех случайных величин (их математическому ожиданию): $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} M[X]$. Рассмотрим статистическое толкование этого утверждения. Пусть исследуется одна случайная величина X

Для ее исследования производятся независимые испытания (измерения), каждое из которых дает одно значение этой величины.

Будем предполагать, что с каждым испытанием связана своя случайная величина X_j (j=1,2,3...). Каждый результат испытания может дать любое из возможных значений случайной величины X, и мы не можем предсказать, какое именно; но в отношении выборочного среднего $\overline{X_n}$ мы с большой уверенностью можем предсказать, что его значение будет близко к математическому ожиданию M[X]. Из теоремы Чебышева следует , что $\overline{X} \approx M[X]$, т.е. что приближенным значением математического ожидания случайной величины является среднее арифметическое ее эмпирических значений

Вытекающую из закона больших чисел практическую уверенность в близости $\overline{X_n}$ к M[X] при достаточно большом n формулируют как практическую уверенность в том, что при достаточно большом объеме выборки выборочное среднее будет сколь угодно мало отличаться от генерального среднего

Под ошибкой измерения понимают разность x-a между результатом измерения x и истинным значением a измеряемой величины. При любом данном уровне техники измерений всегда остаются неустранимые ошибки – их принято называть случайными ошибками измерений

Эти ошибки вызываются многочисленными, трудно выявляемыми причинами, каждая из которых приводит лишь к незначительному разбросу результатов измерений. Каждая из причин порождает свою, так называемую элементарную ошибку измерения. реально наблюдаемая ошибка измерения является суммой элементарных ошибок, и можно ожидать, что к ней применима центральная предельная теорема о нормальности закона распределения вероятностей для случайной ошибки

Параметр σ этого распределения называют средней квадратической ошибкой измерения или стандартной ошибкой измерения (иногда просто стандартом). Стандартная ошибка характеризует точность измерений

При малом числе измерений трудно утверждать, что оценка совпадает с оцениваемым параметром. Также невозможно предсказать слева или справа от среднего значения оказывается оцениваемый параметр

В такой ситуации разумно ввести в рассмотрение другой вид оценивания неизвестного параметра распределения, а именно некоторый интервал со случайными границами, который накрывает истинное значение а с заданной вероятностью р. Такой интервал называется доверительным интервалом, а вероятность р – доверительной вероятностью или надежностью: $\bar{x}-t(p,k)\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t(p,n)\frac{S}{\sqrt{n}}$,где $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$ -точечная оценка среднего квадратического отклонения σ, t(p,k) – коэффициент Стьюдента, зависящий от доли членов совокупности, которые должны попасть в интервал, от выбранной вероятности того, что они туда действительно попадут, и числа степеней свободы k=n-1.

Очевидно, что с увеличением объема выборки n, значение коэффициента t должно уменьшаться, что приведет к сужению доверительного интервала.

Отсюда следует вывод, что добросовестный экспериментатор, стремящийся получить достоверные результаты исследований, должен стремиться к максимально возможному числу измерений.